Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Faculté des Sciences Économiques et de Gestion

Licence 2 de Sciences Économiques et de Gestion

Année universitaire : 2020/2021

Professeur : F. B. Doucouré

Travaux Dirigés de Statistique 3

Fiche 1 : Loi normale et lois de probabilité dérivées

Exercice 1 : Loi normale

Dans les rayons d'un hypermarché dakarois, le poids (en grammes) d'un paquet de sucre en poudre est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne 1 000 grammes et d'écart type 8 grammes . Calculer la probabilité que le poids d'un paquet pris au hasard soit :

1. compris entre 1 000 et 1 008 grammes ;

2. supérieur à 1 008 grammes ;

3. ne s'écarte pas de sa moyenne de plus de deux écarts types.

Exercice 2 : Somme de deux lois normales indépendantes

Une société minière exploite deux gisements. Le premier a une production journalière moyenne de 2 000 tonnes avec un écart-type de 150 tonnes.
Le second a une production journalière moyenne de 3 000 tonnes avec un écart-type de 200 tonnes.
Calculer la probabilité que la production journalière de la société excède 5 200 tonnes.
On admet que les productions des deux gisements sont normales et indépendantes.

Exercice 3 : Théorème central limite

Le chiffre d'affaires hebdomadaire d'un rayon d'un grand magasin dakarois est une variable aléatoire dont la moyenne et l'écart type sont respectivement :

$$m = 18\,000\,000 \text{ FCFA} \quad ; \quad \sigma = 2\,400\,000 \text{ FCFA}$$

Le responsable du rayon a pour objectif annuel fixé par sa direction que le chiffre d'affaires annuel de ce rayon dépasse 925 000 000 FCFA.

Calculer la probabilité qu'il réussisse son objectif ? On rappelle qu'une année est composée de 52 semaines.

Exercice 4 : Lectures de tables des lois du Khi-Deux, Student et Fisher

Soient U, V, W des variables aléatoires suivant respectivement les lois χ^2_{10} , T_{12} et F(5,30).

Calculer

1. u tel que P(U ≤ u) = 0,975
2. v tel que P(− v ≤ V ≤ v) = 0,70
3. w tel que P(W ≤ w) = 0,95

Exercice 5 : Loi Gamma

Une variable aléatoire X admet une loi Gamma paramètre a strictement positif si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x} \quad \text{si } x > 0$$

$$\text{avec} \quad \Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \ .$$

1. Démontrer les propriétés suivantes :

1.1 $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$

1.2 $\Gamma(n)=(n-1)!\ ,\ n\in \mathbb{N}^*$

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 6 : Loi Bêta

Une variable aléatoire X admet une loi Bêta de

paramètres α et β , $(\alpha>0, \quad \beta>0)$ si sa

densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad \text{si} \quad x\in[0,1]$$

avec

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7 : Loi du Khi-Deux à n degrés de liberté

Une variable aléatoire Y admet une suit une loi du Khi-Deux à n degrés de liberté si densité de probabilité est donnée par :

$$f(y) = \frac{y^{n/2\ -\ 1}}{2^{n/2}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \text{ si } y > 0$$

Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 8 : Loi du Khi-Deux à deux degrés de liberté

On s'intéresse à un phénomène aléatoire caractérisé par une variable aléatoire X de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{\theta}\sqrt{x}} \qquad \text{si } x > 0$$

où Ɵ est un paramètre inconnu strictement positif.

Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = \dfrac{2\sqrt{X}}{\theta}$.

Indication : On indique le résultat suivant :

$$\frac{d}{dy}\int_{v(y)}^{u(y)} f(x)\,dx = u'(y)\,f\left[u(y)\right] - v'(y)f\left[v(y)\right]$$

où u' est la dérivée première de u.